INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

Mai 1985. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Notations :

i. Étant donnés deux espaces vectoriels E et F sur R, de dimensions finies, l'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout élément $f \in \mathcal{L}(E, F)$, son noyau est $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ et son image est $\operatorname{Im} f = f(E)$.

ii. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E, tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique en $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$, et $x_2 \in E_2$. On appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme de E, qui à tout élément $x \in E$ fait correspondre le terme x_1 de la décomposition.

iii. Lorsque E est muni d'un produit scalaire $< \ . \ , \ . \ >_E$, on peut définir pour tout sous-espace E_1 de E, son sous-espace orthogonal :

$$E_1^{\perp} = \{ x \in E : < x, y >_E = 0, \quad \forall y \in E_1 \}.$$

On appelle projecteur orthogonal sur E_1, le projecteur sur E_1 parallèlement à $E_1^{\perp}$; ce projecteur est noté P_{E_1}.

iv. Lorsque E et F sont munis de produits scalaires, l'adjointe d'un élément $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est l'élément $f' \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que :

$$< f(x), y >_F = < x, f'(y) >_E \quad \forall x \in E, y \in F$$

(cet élément existe et est unique).

v. Lorsque $E = F$ et $f' = f$, l'endomorphisme f est dit auto-adjoint.

I

Étant donné un élément $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle inverse généralisée de f, tout élément $f^- \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que :

$$\forall y \in \operatorname{Im} f : f^-(y) \in f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E : f(x) = y\}$$

On désigne par $\operatorname{Inv}(f)$ l'ensemble des inverses généralisées de f

I 1° Vérifier qu'un élément de $\mathcal{L}(F, E)$ est caractérisé par la donnée de ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F_1 et F_2 de F.

I 2° Étudiant les restrictions d'une inverse généralisée de f à $\operatorname{Im} f$ et à un sous-espace supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F, montrer que $\operatorname{Inv}(f)$ est non vide.

I 3° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\operatorname{Inv}(f)$ soit réduit à un élément? Quelle est alors l'interprétation de cet élément unique ?

I 4° Soit f_0 l'application nulle : $\forall x \in E, f_0(x) = 0$.

Quel est $\operatorname{Inv}(f_0)$?

I 5° Établir l'équivalence suivante :

$g \in \operatorname{Inv}(f) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}(F, E)$ et $f \circ g \circ f = f$.

I 6° Montrer que tout élément de $\operatorname{Inv}(f)$ a un rang au moins égal à celui de f.

I 7° Existe-t-il toujours des éléments de $\operatorname{Inv}(f)$ de rang égal à Min (dim E, dim F)?

II

II. 1° Vérifier que $\operatorname{Inv}(f)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(F, E)$.

II 2° On suppose les espaces vectoriels E et F munis de produits scalaires. Soit $\tilde{f}^-$ un élément de $\operatorname{Inv}(f)$, montrer que toutes les autres inverses généralisées s'écrivent sous la forme :

$$f^- = \tilde{f}^- + g \circ P_{(\operatorname{Im} f)^{\perp}} + P_{\operatorname{Ker} f} \circ h,$$

où g et h sont des éléments quelconques de $\mathcal{L}(F, E)$.

3° Quelle est la dimension de $\operatorname{Inv}(f)$?

III

III 1° a. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. Vérifier que le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 est un endomorphisme idempotent.

b. Inversement, montrer que tout endomorphisme idempotent de E, s'interprète comme un projecteur. Sur quel sous-espace? Parallèlement à quel autre?

III 1° On suppose E muni d'un produit scalaire.

a) Vérifier que le projecteur orthogonal sur un sous-espace E_1 de E est un endomorphisme auto-adjoint, idempotent.

b) Inversement, montrer que tout endomorphisme auto-adjoint, idempotent s'interprète comme un projecteur orthogonal.

III 3° Vérifier que, pour toute inverse généralisée $f^- \in \text{Inv}(f)$, l'endomorphisme $f \circ f^-$ est un projecteur. Quel est le sous-espace image ?

III 4° Établir que le rang de $f \circ f^-$ est égal au rang de f.

III 5° Les résultats des deux questions précédentes peuvent-ils être étendus à l'endomorphisme $f^- \circ f$?

III. 6° On suppose les deux espaces E et F, munis de produits scalaires.

i. Montrer que l'application $f \circ (f' \circ f)^- \circ f'$ ne dépend pas de l'inverse généralisée choisie pour $f' \circ f$.

ii. Donner son interprétation en terme de projecteur orthogonal.

IV

E et F sont supposés munis de produits scalaires.

Étant donné un élément $f \in \mathfrak{L}(E, F)$, on appelle pseudo-inverse de f tout élément $f^+ \in \mathfrak{L}(F, E)$ satisfaisant les quatre conditions :

i. $f \circ f^+ \circ f = f$

ii. $f^+ \circ f \circ f^+ = f^+$

iii. $f \circ f^+$ auto-adjointe

iv. $f^+ \circ f$ auto-adjointe

IV 1° Établir que $(\text{Im} f)^\perp = \text{Ker} f^+$.

IV 2° Montrer que : $f^+ (\text{Im} f) = (\text{Ker} f)^\perp$.

IV. 3° En déduire que l'application f admet une et une seule pseudo-inverse.

IV. 4° Vérifier que l'ensemble des quatre conditions caractérisant la pseudo-inverse est équivalent à :

(*) $f^+ \circ f \circ f' = f'$

(**) $f \circ f^+ \circ (f^+)' = (f^+)'$

IV. 5° Soient f et g deux éléments de $\mathfrak{L}(E, F)$ tels que :

$\text{Im} g \subset \text{Im} f$, établir l'égalité :

$[(I - g \circ g^+) \circ f]^+ = f^+ \circ [I - g \circ (f^+ \circ g)^+ \circ f^+]$, où I désigne l'application identité de F.

V

On suppose F = E et cet espace muni d'un produit scalaire.

V. 1° Soit f un endomorphisme de E et g un endormorphisme inversible de E, montrer que :

$$\text{Inv}(g \circ f \circ g^{-1}) = \{ g \circ f^- \circ g^{-1}, \text{ avec } f^- \in \text{Inv}(f) \}$$

Quelle interprétation donner à ce résultat ?

V. 2° Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E et $(e_1 \ldots e_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f.

Donner les représentations matricielles par rapport à cette base :

a. Des inverses généralisées de f ;

b. Des inverses généralisées auto-adjointes de f ;

c. Des inverses généralisées satisfaisant la condition supplémentaire $f^- \circ f \circ f^- = f^-$;

d. De la pseudo-inverse.